1. *Sobre la gráfica de una función polinómica con coeficientes enteros, se eligen dos puntos con coordenadas enteras. Probar que si la distancia entre ellos es un número entero, entonces el segmento que los une es paralelo al eje de abscisas.*

Solución. Sea el polinomio $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $a_i \in \mathbb{Z}$ y sean $A(c, f(c))$ y $B(d, f(d))$ dos puntos con coordenadas enteras. Entonces

$$f(c) - f(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i(c^i - d^i)$$

Todos los sumandos de esta suma son divisibles por $c - d$, así que

$$f(c) - f(d) = \sum_{i=1}^{n} a_i(c^i - d^i) = k(c - d),$$

donde k es un entero. Como la distancia entre los puntos A y B, que denotamos por $d(A, B)$ es un entero, entonces $d^2(A, B)$ es un cuadrado perfecto. Pero

$$d^2(A, B) = (c - d)^2 + k^2(c - d)^2 = (c - d)^2(1 + k^2)$$

luego la única posibilidad para que esta expresión sea un cuadrado perfecto es que $k = 0$, en cuyo caso

$$f(c) - f(d) = 0$$

y efectivamente el segmento AB es paralelo al eje de abcisas.

5. *Sean p y n enteros positivos, tales que p es primo, $n \geq p$, y $1+np$ es un cuadrado perfecto. Probar que $n + 1$ es suma de p cuadrados perfectos no nulos.*

Solución. Sea $1 + np = k^2$, con k entero positivo. Entonces $np = k^2 - 1 = (k - 1)(k + 1)$. Ahora consideramos dos casos:

1. Si el primo p divide a $k - 1$, entonces $k - 1 = p\ell$ y $k = p\ell + 1$, con ℓ entero positivo. Por tanto

   $$1 + np = k^2 = (p\ell + 1)^2 = p^2\ell^2 + 2p\ell + 1 \Leftrightarrow np = p^2\ell^2 + 2p\ell \Leftrightarrow n = p\ell^2 + 2\ell$$

   Entonces, $n + 1 = p\ell^2 + 2\ell + 1 = (p - 1)\ell^2 + (\ell + 1)^2$ como queríamos probar.

2. Si el primo p divide a $k + 1$, entonces $k + 1 = p\ell$ y $k = p\ell - 1$, con $\ell > 1$ entero ($\ell = 1$ se corresponde con el caso $n = p - 2$, que no es posible). Por tanto

   $$1 + np = k^2 = (p\ell - 1)^2 = p^2\ell^2 - 2p\ell + 1 \Leftrightarrow np = p^2\ell^2 - 2p\ell \Leftrightarrow n = p\ell^2 - 2\ell$$

   Entonces, $n + 1 = p\ell^2 - 2\ell + 1 = (p - 1)\ell^2 + (\ell - 1)^2$ es suma de p cuadrados perfectos.

2. Dados los números racionales r, q y n, tales que $\frac{1}{r+qn}+\frac{1}{q+rn}=\frac{1}{r+q}$, probar que $\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}$ es un número racional.

Solución. Racionalizando, tenemos

$$\sqrt{\frac{n-3}{n+1}}=\sqrt{\frac{(n-3)(n+1)}{(n+1)^2}}=\frac{\sqrt{(n-1)^2-4}}{n+1}$$

Por tanto, el enunciado quedará probado si vemos que $(n-1)^2-4$ es el cuadrado de un número racional. Para ello, utilizamos la condición y la escribimos en la forma equivalente

$$(r+qn)(r+q)+(q+rn)(r+q)=(r+qn)(q+rn)\Leftrightarrow (r+q)^2=rq(n-1)^2$$

de donde resulta $(n-1)^2=\frac{(r+q)^2}{rq}$. Entonces, se tiene que

$$(n-1)^2-4=\frac{(r+q)^2}{rq}-4=\frac{(r-q)^2}{rq}=\frac{(r-q)^2(n-1)^2}{(r+q)^2}=\left(\frac{(r-q)(n-1)}{(r+q)}\right)^2$$

(En la penúltima igualdad se ha utilizado que $rq=\frac{(r+q)^2}{(n-1)^2}$). Por tanto, $(n-1)^2-4$ es el cuadrado de un número racional y hemos terminado.

4. ¿Existen infinitos enteros positivos que no pueden representarse de la forma $a^3+b^5+c^7+d^9+e^{11}$, donde a,b,c,d,e son enteros positivos?
Razona la respuesta.

SOLUCIÓN:

Como $5\times 7\times 9\times 11=3465$, veamos cuántos enteros podemos obtener que sean menores o iguales que N^{3465}. Al ser $a^3, b^5, c^7, d^9, e^{11}$ positivos, cada uno de ellos es menor que N^{3465}, y tenemos

$$a<N^{1155},\ b<N^{693},\ c<N^{495},\ d<N^{385} \text{ y } e<N^{315}.$$

Luego al ser $1155+693+495+385+315=3043$, hay menos de N^{3043} tales números que se pueden poner en la forma indicada, y hay más de N^{3464} números entre los N^{3465} primeros que no se pueden representar en la forma propuesta. Al crecer N arbitrariamente, también aumenta el número de enteros positivos que no pueden representarse en la forma indicada y por lo tanto sí existen infinitos enteros que no se pueden representar de la manera propuesta.

1. Determinar razonadamente si el número $\lambda_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 2}$ es irracional para todo entero no negativo n.

SOLUCIÓN. Supongamos que n es par. Entonces, $3n^2 + 2n$ es múltiplo de 4 y $3n^2 + 2n + 2$ es múltiplo de 2 pero no de 4, con lo que no puede ser un cuadrado perfecto.

Supongamos que n es impar. Cualquier cuadrado perfecto impar da resto 1 al dividir entre 8; este resultado se demuestra trivialmente, escribiendo el cuadrado de cualquier entero impar $2m+1$ en la forma $4m(m+1)+1$ y observando que, bien m, bien $m+1$, ha de ser par. Se tiene entonces que si n es impar y $3n^2 + 2n + 2$ fuera un cuadrado perfecto, entonces $3n^2 + 2n + 2$ daría resto 1 al dividir entre 8, o equivalentemente, $2n$ daría resto $1 - 2 - 3 = -4$ al dividir entre 8, con lo que $2n$ sería múltiplo de 4 y n par, contradicción. Luego para cualquier entero, positivo o negativo, $3n^2 + 2n + 2$ es un entero que no es un cuadrado perfecto, por tanto λ_n es siempre irracional para cualquier entero n, positivo o negativo.

Nótese también que λ_n es siempre real, incluso cuando n es un entero negativo, pues $3n^2 + 2n + 2 > (n+1)^2 \geq 0.$

4. Hallar todos los números enteros positivos n y k, tales que $(n+1)^n = 2n^k + 3n + 1$.

SOLUCIÓN. Para $n = 1$, la ecuación se escribe 2 = 6, claramente falsa. Luego $n \geq 2$. Por la fórmula del binomio de Newton,

$$(n+1)^n - 1 = n^2 + \binom{n}{2} n^2 + \binom{n}{3} n^3 + \ldots$$

es múltiplo de n^2. Tenemos entonces dos casos a analizar:

- k = 1. Entonces, n^2 divide a $2n^1+3n = 5n$, es decir, n divide a 5, con lo que $n = 5$, y la ecuación se convierte en $6^5=26$, claramente falsa.
- $k \geq 2$. Entonces, n^2 divide a $2n^k + 3n$, pero como divide a $2n^k$, también ha de dividir a $3n$, es decir, n divide a 3, con lo que n=3. Se comprueba fácilmente que para $n = 3$, la ecuación se convierte en $4^3 = 2\times 3^k + 10$, luego en $3^k = 27 = 3^3$, que es cierta si y sólo si $k = 3$.

• **Problema 1**

Una sucesión *pucelana* es una sucesión creciente de dieciséis números impares positivos consecutivos, cuya suma es un cubo perfecto. ¿Cuántas sucesiones *pucelanas* tienen solamente números de tres cifras?

Solución:

Sea la sucesión $n, n+2, \ldots, n+30$. Entonces la suma es $\frac{1}{2}\,16(2n+30) = 8(2n+30)$. Por tanto, es necesario que $2n+30$ sea un cubo perfecto. Ahora hay que contar el número de tales n que son impares y verifican $101 \leq n \leq 969$. Los cubos pares entre 232 y 1968 son 512, 1000 y 1728, que corresponden a valores de n de 241, 485 y 849. Por lo tanto hay exactamente tres sucesiones *pucelanas*.

PROBLEMA 4. - Determina justificadamente todos los pares de números enteros (x, y) que verifican la ecuación $x^2 - y^4 = 2009$.

Solución:

Dada una solución (x, y) cualquiera, es claro que también son soluciones $(x,-y), (-x, y)$ y $(-x,-y)$, con lo que se puede asumir sin pérdida de generalidad que $x, y \geq 0$. Supongamos entonces que es así. Es claro que $(x-y^2)(x+y^2) = 7^2 \cdot 41$.

Si $x-y^2$ y $x+y^2$ no son primos entre sí, su máximo común divisor al cuadrado divide a $2009 = 7^2 \cdot 41$, luego es 7 y divide a $(x+y^2)+(x-y^2) = 2x$ y a $(x+y^2)-(x-y^2) = 2y^2$, con lo que existen enteros no negativos u y v tales que $x = 7u$, $y = 7v$ y $(u+7v^2)(u-7v^2) = 41$. Como ambos factores han de ser enteros, se tiene que $u+7v^2 = 41$ y $u-7v^2 = 1$, con lo que $u = 21$ y $v^2 = \frac{10}{7}$. No existen pues soluciones enteras en este caso.

Si $x-y^2$ y $x+y^2$ son primos entre sí, un posible caso es que $x-y^2 = 1$ y $x+y^2 = 2009$, con lo que $y^2 = 1004$, absurdo pues $31^2 = 961 < 1004 < 32^2$. Resta entonces tan sólo el caso en que $x-y^2 = 41$ y $x+y^2 = 49$, que produce $x = 45$, $y^2 = 4$, con lo que la única solución con enteros no negativos es $x = 45$ e $y = 2$, y las únicas soluciones en enteros son $(x, y) = (\pm 45, \pm 2)$.

PROBLEMA 1.- Halla todas las sucesiones finitas de n números naturales consecutivos $a_1, a_2, ..., a_n$, con $n \geq 3$, tales que $a_1 + a_2 + ... + a_n = 2009$.

Primera solución:

Supongamos que N es la suma de n números naturales consecutivos empezando por $k+1$. Entonces

$$N = (k+1) + (k+2) + ... + (k+n) =$$
$$\left[1 + 2 + ... + k + (k+1) + ... + (k+n)\right] - \left[1 + 2 + ... + k\right] =$$
$$\frac{(k+n)(k+n+1)}{2} - \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n(2k+n+1)}{2}.$$

Teniendo en cuenta que $2009 = 1 \times 2009 = 7 \times 287 = 49 \times 41$ se tienen los siguientes casos:

(1) Si $n = 7$ y $\frac{(2k+n+1)}{2} = 287$ resulta $k = 283$ con lo que

$2009 = 284 + 285 + 286 + 287 + 288 + 289 + 290.$

(2) Si $\frac{n}{2} = 7$ y $2k + n + 1 = 287,$ resulta $k = 136$ con lo que

$2009 = 137 + 138 + ... + 150.$

(3) Si $n = 41$ y $\frac{(2k+n+1)}{2} = 49$ resulta $k = 28$ con lo que

$2009 = 29 + 30 + 31 + ... + 69.$

(4) Si $n = 49$ y $\frac{(2k+n+1)}{2} = 41$ resulta $k = 16$ con lo que

$2009 = 17 + 18 + 19 + ... + 65.$

(5) Los otros casos dan valores de k que no verifican el enunciado.

1.- Halla dos enteros positivos a y b conociendo su suma y su mínimo común múltiplo. Aplícalo en el caso de que la suma sea 3972 y el mínimo común múltiplo 985928.

SOLUCIÓN:

Sea p un número primo que divide a la suma $a+b$ y a su mínimo común múltiplo $\left[a,b\right]$. Como $p\left|\left[a,b\right]\right.$ al menos divide a uno de los dos enteros a ó b. Si $p|a$, al dividir p a la suma $a+b$, también $p|b$. (Obviamente el mismo razonamiento vale si hubiéramos supuesto que $p|b$). Por tanto podemos dividir los dos números a y b por p y también su mínimo común múltiplo $\left[a,b\right]$, para obtener dos enteros a_1 y b_1 tales que $a_1=\frac{a}{p}, b_1=\frac{b}{p}$ y $\left[a_1,b_1\right]=\frac{\left[a,b\right]}{p}$. Sea el máximo común divisor de a y b, $d=\left(a,b\right)$. Repitiendo el proceso anterior llegaremos a obtener dos enteros A y B tales que $a=dA, b=dB$ y $\left(A,B\right)=1$. Entonces $\left[A,B\right]=AB$. Ahora es fácil determinar A y B a partir del sistema de ecuaciones $\begin{cases} A+B=\dfrac{a+b}{d} \\ AB=\dfrac{\left[a,b\right]}{d} \end{cases}$. Es decir A y B son las raíces de la ecuación de segundo grado $d\,t^2-(a+b)t+\left[a,b\right]=0$. Observamos que el discriminante de esta ecuación es no negativo. En efecto:

$$\Delta=(a+b)^2-4\,d\left[a,b\right]=(a+b)^2-4ab=(a-b)^2\geq 0.$$

Si a y b son distintos, la ecuación anterior tiene por soluciones los dos enteros positivos $A=\frac{a}{d}$ y $B=\frac{b}{d}$.

En particular cuando $a+b=3972$ y $\left[a,b\right]=985928$, tenemos que $d=(3972,\ 985928)=4$. Por tanto $a=4A$ y $b=4B$ siendo A y B las raíces de la ecuación $4t^2-3972t+985928=0$.

Es decir $A=491$ y $B=502$ y los números buscados son $a=1964$ (año de la primera OME) y $b=2008$ (año de la actual edición de la OME).

Determinar todos los posibles valores enteros no negativos que puede tomar la expresión $\dfrac{m^2+mn+n^2}{mn-1}$, siendo m y n enteros no negativos tales que $mn \neq 1$.

Solución.

Sea $\dfrac{m^2+mn+n^2}{mn-1}=k,\ k\in N$ (naturales con el 0).

En el caso $m=n$, el número $k=3+\dfrac{3}{m^2-1}$ es un entero positivo si $m=0$ ó $m=2$; de donde $k=0$ ó $k=4$ respectivamente.

El caso $n=0$ lleva a que $k=-m^2$ y por tanto $m=k=0$.

Consideremos ahora las soluciones (m,n) tales que $m>n>0$. Como la relación dada es equivalente a $m^2-(k-1)mn+n^2+k=0$, observamos que si (m,n) es una solución y $n>(k-1)n-m>0$, entonces $(n,(k-1)n-m)$ es también una solución. La desigualdad $(k-1)n-m>0$ es cierta en todos los casos porque se convierte sucesivamente en una desigualdad obvia:

$$k>\frac{m+n}{n},\quad \frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}>\frac{m+n}{n},\quad n^3>-m-n.$$

Del mismo modo la desigualdad $n>(k-1)n-m$ es sucesivamente equivalente a:

$$k<\frac{m+2n}{n},\quad \frac{m^2+mn+n^2}{mn-1}<\frac{m+2n}{n},\quad m>n+\frac{3n}{n^2-1}\ \text{para}\ n>1.$$

Si $3n<n^2-1$, esto es si $n\geq 4$, la desigualdad anterior es cierta y por tanto para cada solución (m,n) con $m>n\geq 4$ encontramos una solución (n,p) con $n>p>0$. De este modo, cada solución es tal que $n\leq 3$.

Para $n=1$, obtenemos $k=m+2-\dfrac{3}{m-1}$, $m=4$ ó $m=2$, $k=7$.

Para $n=2$, obtenemos $4k=2m+5-\dfrac{21}{2m-1}$, $m=4$ ó $m=11$, $k=4$ ó $k=7$.

Para $n=3$, obtenemos $9k=3m+10+\dfrac{91}{3m-1}$, que no conduce a ninguna solución.

Entonces los posibles valores k enteros no negativos de la expresión del enunciado son 0, 4 y 7.

Problema 1

Sea $P(x)$ un polinomio con coeficientes enteros, demostrar que si existe un entero *k* tal que ninguno de los enteros $P(1), P(2), \ldots, P(k)$ es divisible por *k*, entonces $P(x)$ no tiene raíces enteras.

Solución.

Por reducción al absurdo. Si *n* fuese una raíz, por una parte tenemos

$$P(x) = (x - n)\,Q(x)$$

y por otra siempre existen enteros *q* y *r* tales que $n = kq + r$, con $1 \le r \le k$ (basta hacer la división entera y en el caso de ser resto cero se rebaja el cociente en una unidad), entonces

$$P(r) = (r - n)\,Q(r) = -kqQ(r)$$

en contra de lo supuesto en el enunciado.

Problema 5

Probar que el producto de cuatro naturales consecutivos no puede ser ni cuadrado ni cubo perfecto.

Solución. Si el producto $N = (n-1)\,n\,(n+1)(n+2)$ fuese un cuadrado, basta ponerlo en la forma

$$N = (n-1)\,n\,(n+1)(n+2) = \left(n^2 + n - 2\right)\left(n^2 + n\right) = \left(n^2 + n - 1\right)^2 - 1$$

de donde se sigue una contradicción (no hay dos cuadrados consecutivos).

Si *N* fuese cubo perfecto, podemos suponer que $n > 2$ (si *n* = 2 , *N* = 24).

Distinguimos ahora dos casos:

a) *n* impar, entonces *n* es primo con los otros tres factores y si *N* es cubo perfecto, también lo es

$$M = (n-1)(n+1)(n+2) = n^3 + 2n^2 - n - 2$$

pero si $n > 2 \Rightarrow n^3 < n^3 + 2n^2 - n - 2 < (n+1)^3$ y ya tenemos la contradicción pues entre dos cubos consecutivos no puede haber otro cubo.

b) si *n* es par, $n+1$ es impar y por tanto $n+1$ es primo con el producto

$$M = (n-1)\,n\,(n+2) = n^3 + n^2 - 2n$$

que también debe ser cubo perfecto.

Finalmente, como $x > 2 \Rightarrow x^3 < x^3 + x^2 - 2x < (x+1)^3$ se sigue la contradicción.

Problema 1
Sean *a* y *b* enteros. Demostrar que la ecuación

$$(x-a)(x-b)(x-3)+1=0$$

admite a lo sumo una solución entera.
Solución.
Sea el entero *p* una raíz, entonces: $(x-a)(x-b)(x-3)+1$ se anula para $x = p$, es decir

$$(p-a)(p-b)(p-3)=-1$$

Distingamos varios casos
1.- $(p-3)=1 \Rightarrow p=4$
entonces para los otros factores tenemos dos posibilidades:

$\left.\begin{array}{r}(p-a)=-1 \Rightarrow a=p+1=5 \\ (p-b)=1 \Rightarrow b=p-1=3\end{array}\right\}$ sustituyendo queda la ecuación

$$(x-3)^2(x-5)+1=x^3-11x^2+39x-44=0$$

y una vez separada la raíz 4 resulta la ecuación $x^2-7x+11=0$ que no tiene raíces enteras.

$\left.\begin{array}{r}(p-a)=1 \Rightarrow a=p-1=3 \\ (p-b)=-1 \Rightarrow b=p+1=5\end{array}\right\}$ idéntico al anterior.

2.- $(p-3)=-1 \Rightarrow p=2$
entonces para los otros factores tenemos dos posibilidades:

$\left.\begin{array}{r}(p-a)=1 \Rightarrow a=p-1=1 \\ (p-b)=1 \Rightarrow b=p-1=1\end{array}\right\}$ sustituyendo queda la ecuación

$$(x-1)^2(x-3)+1=x^3-5x^2+7x-2=0$$

y después de separar la raíz 2 resulta $x^2-3x+1=0$ que no tiene raíces enteras.
Finalmente,

$\left.\begin{array}{r}(p-a)=-1 \Rightarrow a=p+1=3 \\ (p-b)=-1 \Rightarrow b=p+1=3\end{array}\right\}$ sustituyendo queda la ecuación

$$(x-3)^3+1=x^3-9x^2+27x-26=0$$

y después de separar la raíz 2 resulta $x^2-7x+13=0$ que no tiene raíces.

Problema 1.

Se tienen dos progresiones de números reales, una aritmética $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *y otra geométrica* $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *no constante. Se cumple que* $a_1 = g_1 \neq 0$, $a_2 = g_2$ *y* $a_{10} = g_3$. *Decidir, razonadamente, si para cada entero positivo* p, *existe un entero positivo* m, *tal que* $g_p = a_m$.

Solución.

Sean d y $r \neq 1$ la diferencia y la razón, respectivamente, de las progresiones aritmética $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y geométrica $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En primer lugar tenemos $g_1 r = g_2 = a_2 = a_1 + d = g_1 + d$ de donde $d = g_1(r-1)$. En segundo lugar $g_1 r^2 = g_3 = a_{10} = a_1 + 9d = g_1 + 9g_1(r-1)$. De aquí sale $r^2 - 9r + 8 = 0$ puesto que $g_1 \neq 0$. Las soluciones son $r = 1$ (que debemos descartar ya que la progresión geométrica no es constante) y $r = 8$ que es la razón buscada. De aquí también resulta $d = 7g_1$.
Sea p un entero positivo cualquiera. Debemos encontrar un m tal que $g_p = a_m$, es decir $g_p = g_1 8^{p-1} = a_m = a_1 + (m-1)d = g_1 + (m-1)7g_1$ que es equivalente a $8^{p-1} + 6 = 7m$. Puesto que las potencias de 8 módulo 7 siempre son 1, resulta que $8^{p-1} + 6$ es siempre múltiplo de 7 y siempre podremos encontrar $m = \dfrac{8^{p-1}+6}{7}$.

Problema 2.

Sea p *un número primo positivo dado. Demostrar que existe un entero* α *tal que* $\alpha(\alpha-1)+3$ *es divisible por* p *si y sólo si existe un entero* β *tal que* $\beta(\beta-1)+25$ *es divisible por* p.

Solución.

Sean $f(x) = x(x-1) + 3 = x^2 - x + 3$, $g(x) = x(x-1) + 25 = x^2 - x + 25$.

Caso $p = 2$. No podemos encontrar ni un tal α ni un tal β porque para cualesquiera α y β enteros, $f(\alpha)$ y $g(\beta)$ son impares, es decir, no múltiplos de p simultáneamente, y por lo tanto el enunciado se cumple.

Caso $p = 3$. Ahora $f(1) = 3$, $g(2) = 27$ y el enunciado también se cumple.

Caso $p \geq 5$. Decir que p divide a $f(\alpha)$ es lo mismo que decir que $f(\alpha) \equiv 0 \mod p$. En adelante seguiremos con esta notación de congruencias sobreentendiendo el módulo p. El enunciado es equivalente a ver que las congruencias $f(x) = x^2 - x + 3 \equiv 0$ y $g(x) = x^2 - x + 25 \equiv 0$ tengan o no tengan solución simultáneamente.
Puesto que 2 no es congruente con p, se puede dividir por 2 módulo p. Tenemos

$$x^2 - x + 3 \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} \equiv 0 \Longleftrightarrow x \equiv \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}.$$

Análogamente

$$x^2 - x + 25 \equiv \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{99}{4} \equiv 0 \Longleftrightarrow x \equiv \frac{1 \pm 3\sqrt{-11}}{2}.$$

En consecuencia las congruencias $f(x) \equiv 0$ y $g(x) \equiv 0$ tienen o no solución (a la vez) según que -11 sea cuadrado perfecto módulo p o no lo sea.
Observación. Recordemos que esto se cumplirá según que

$$(-11)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \quad \text{o} \quad (-11)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1.$$

Problema 4.

Sean $m \geq 1$ un entero positivo, a y b enteros positivos distintos mayores estrictamente que m^2 y menores estrictamente que $m^2 + m$. Hallar todos los enteros d, que dividen al producto ab y cumplen $m^2 < d < m^2 + m$.

Solución.

Sea d un entero positivo que divida a ab y tal que $d \in (m^2, m^2 + m)$. Entonces d divide a $(a-d)(b-d) = ab - da - db + d^2$. Como que $|a - d| < m$ y $|b - d| < m$, deducimos que $\big|(a-d)(b-d)\big| < m^2 < d$ lo que implica que $(a-d)(b-d) = 0$. Así $d = a$ o $d = b$.